

Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, Stabilisierbarkeit, Entdeckbarkeit und Dualität

Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, Stabilisierbarkeit, Entdeckbarkeit

Wir betrachten lineare, zeitinvariante Systeme der Form

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y &= Cx\end{aligned}$$

und $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^k$.

Definition 1. Das Paar (A, B) heißt **steuerbar**, wenn die Steuerbarkeitsmatrix

$$\text{Rang}([B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]) = n$$

vollen Rang hat.

Definition 2. (Hautus-Test für Stabilisierbarkeit) Das Paar (A, B) heißt **stabilisierbar**, wenn

$$\text{Rang}[\lambda I - A \mid B] = n \quad \forall \lambda(A) : \text{Re}(\lambda(A)) \geq 0.$$

Satz 1. Das Paar (A, B) ist stabilisierbar, genau dann wenn ein $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$ existiert, so dass die Matrix $A - BK$ Hurwitz ist.

Beispiel: Seien

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wegen der Dreiecksstruktur, sind die Eigenwerte der Matrix A auf der Diagonalen und sind somit $\lambda(A) = \{-2, 4\}$. Somit muss die Stabilisierbarkeit nur für $\lambda = 4$ überprüft werden.

$$\text{Rang} \left(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \text{Rang} \left(\begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 2 = n$$

Somit ist (A, B) stabilisierbar.

Satz 2. Wenn (A, B) steuerbar ist, dann ist (A, B) auch stabilisierbar.

Definition 3. Das Paar (A, C) heißt **beobachtbar**, wenn

$$\text{Rang} \left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \right) = n.$$

Definition 4. (Hautus-Test für Entdeckbarkeit) Das Paar (A, C) heißt **entdeckbar**, wenn

$$\text{Rang} \left(\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} \right) = n \quad \forall \lambda(A) : \text{Re}(\lambda(A)) \geq 0.$$

Satz 3. Das Paar (A, C) ist entdeckbar, genau dann wenn ein $L \in \mathbb{R}^{n \times k}$ existiert, so dass die Matrix $A - LC$ Hurwitz ist.

Beispiel: Seien

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

Wegen der Dreiecksstruktur, sind die Eigenwerte der Matrix A auf der Diagonalen und sind somit $\lambda(A) = \{-2, 4\}$. Somit muss die Entdeckbarkeit nur für $\lambda = 4$ überprüft werden.

$$\text{Rang} \left(\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & -3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right) = \text{Rang} \left(\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \right) = 1 < n$$

Somit ist (A, C) nicht entdeckbar.

Satz 4. Wenn (A, C) beobachtbar ist, dann ist (A, C) auch entdeckbar.

Wir betrachten hier eine alternative Charakterisierung von Beobachtbarkeit mit Hilfe der Moden des Systems. Die Moden

$$x_k(t) = v_k e^{\lambda_k t}$$

ergeben sich aus der Eigenwertgleichung des Systems:

$$(\lambda_k I - A)v_k = 0. \quad (1)$$

Die allgemeine Lösung des autonomen Systems setzt sich aus einer Linearkombination der Moden zusammen. Wir betrachten das System $\dot{x} = Ax$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$. Transformation mit der Modalmatrix T auf Diagonalform ergibt:

$$z = T^{-1}x, \quad x = Tz \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = \Lambda z, \quad z_0 = T^{-1}x_0.$$

Dabei bilden die Rechtseigenvektoren v_i bzw. die Linkseigenvektoren w_i^T die gesuchte Transformationsmatrix

$$T = [v_1, v_2, \dots, v_n] \quad \text{bzw.} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix}.$$

Bei Λ handelt es sich um eine Diagonalmatrix (wir setzen der einfacheren Darstellung wegen voraus, daß keine mehrfachen Pole/Eigenwerte auftreten).

Die Lösung des transformierten Systems berechnet sich leicht zu

$$z(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}}_{e^{\Lambda t}} z_0. \quad (2)$$

Die Rücktransformation ergibt

$$x(t) = T e^{\Lambda t} T^{-1} x_0 = [v_1, \dots, v_n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} w_1^T \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} w_n^T \end{bmatrix} x_0. \quad (3)$$

Mittels der Summenschreibweise sieht man sofort, daß die Lösung eine Linearkombination der Moden ist:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \underbrace{v_i e^{\lambda_i t}}_{\text{Mode}} \underbrace{(w_i^T x_0)}_{\text{Skalar}}. \quad (4)$$

Ist ein Mode am Ausgang nicht „sichtbar“, so gilt mit $y = Cx$

$$Cv_k e^{\lambda_k t} = 0$$

woraus sich durch Division mit $e^{\lambda_k t} \neq 0$

$$Cv_k = 0 \quad (5)$$

ergibt. Aus Gleichung (1) und (5) ergibt sich also als Bedingung, daß ein Mode nicht beobachtbar ist:

$$\begin{bmatrix} \lambda_k I - A \\ C \end{bmatrix} v_k = 0 \quad \begin{array}{l} \longleftarrow (\lambda_k, v_k) \text{ ist Mode} \\ \longleftarrow \text{Mode ist nicht beobachtbar.} \end{array}$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist der entsprechende Mode nicht beobachtbar.

Satz 5 ([3, 2]). *Für jedes lineare, zeitinvariante System existiert eine Zustandstransformation, so dass das System wie folgt geschrieben werden kann (**Kalman Dekomposition**):*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [C_1 \quad 0 \quad C_3 \quad 0] x$$

wobei

$$(A_{11}, B_1), \left(\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right)$$

steuerbar sind und

$$\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ 0 & A_{33} \end{bmatrix}, [C_1 \quad C_3] \right), (A_{33}, C_3)$$

beobachtbar sind.

Satz 6. *Ein lineares, zeitinvariantes System ist genau dann Hurwitz, wenn jede der Matrizen A_{11} , A_{22} , A_{33} und A_{44} ihrer Kalman Dekomposition Hurwitz ist.*

Der Satz folgt daraus, dass die Eigenwerte einer Block-Dreiecksmatrix die Eigenwerte der Blöcke auf der Hauptdiagonalen sind, s. S. 62 in [1].

Bemerkung. Für lineare, zeitinvariante Systeme der Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

gelten die gleichen Definitionen und Sätze bzgl. Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, Stabilisiertbarkeit und Entdeckbarkeit und hängen somit nicht von der Durchgriffsmatrix D ab.

Dualität

Definition 5. *Das System*

$$\begin{aligned}\dot{x}' &= A^\top x' + C^\top u', & x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y' &= B^\top x'\end{aligned}$$

mit $u'(t) \in \mathbb{R}^k$, $y'(t) \in \mathbb{R}^m$ heißt das **duale System** zu einem linearen, zeitinvarianten System.

Satz 7. *Folgende Beziehungen gelten zwischen einem linearen, zeitinvarianten System und dem dazugehörigen dualen System.*

1. *System ist asymptotisch stabil $\Leftrightarrow$ duales System ist asymptotisch stabil.*
2. *System ist steuerbar $\Leftrightarrow$ duales System ist beobachtbar.*
3. *System ist beobachtbar $\Leftrightarrow$ duales System ist steuerbar.*
4. *System ist stabilisierbar $\Leftrightarrow$ duales System ist entdeckbar.*
5. *System ist entdeckbar $\Leftrightarrow$ duales System ist stabilisierbar.*

Literatur

- [1] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985.
- [2] J. Lygeros and F. Ramponi. *Lecture Notes on Linear System Theory*. ETH Zürich.
- [3] K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover, et al. *Robust and optimal control*. Prentice Hall New Jersey, 1996.